# Fórmula de Midas: Black&Scholes

**Histórico:** Em 1997 Robert Merton [1944, graduação em engenharia matemática em 1966 pela Universidade Columbia, PhD em economia pelo MIT em 1970] e Myron Scholes [1941] ganharam o prêmio Nobel de economia pelo desenvolvimento dos modelos de precificação de opções, nos quais a famosa fórmula de Black-Scholes foi desenvolvida. Black [1938-1995] não recebeu o prêmio porque morreu um ano antes, com apenas 57 anos. O trabalho pioneiro dessa area foi F. Black and M. Scholes, ***"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"***, no Journal of Political Economy, **81** (3) 637-654 (1973) [DOI: 10.1086/260062] citado mais de 5300 vezes.



Fischer Black Myron Scholes Robert Merton

Essa fórmula é conhecida como a fórmula de Midas. O Rei Midas, na mitologia grega, ganhou um desejo de um sátiro que havia ajudado. Seu desejo foi de que tudo que tocasse se transformasse em ouro. Daí ele descobriu que não podia sequer comer ou beber pois tudo que tocava se transformava em ouro, inclusive sua própria filha quando ele a tocou. Nesse contexto a fórmula de Midas transforma em ouro tudo que ela toca.

Trata-se de uma fórmula com enorme sucesso no mercado e que impressiona quem a compara com os resultados reais dos preços das opções – bom demais para ser verdadeira. Autores como Robert A. Jarrow [Professor da Cornell University com bacharelado em matemática (1974) pela Univ. Duke e PhD em finanças pelo MIT (1979) orientado por Merton] acreditam que a fórmula se tornou uma “profecia auto-realizável”, dado a simplicidade de suas suposições como ausência de custos de transação, ativos infinitamente divisíveis, mercado completo e perfeito etc. Aparentemente o mercado decidiu que a fórmula era tão boa, tão fácil de usar, disponível a todos, que o melhor seria utilizá-la para precificar as opções. Desse forma os agentes do mercado também evitariam ter que responder a perguntas comprometedoras como porque decidiram por tal ou qual preço: a resposta imediata seria – utilizei o padrão do mercado. No entanto, é quase certo que se a fórmula estivesse completamente errada não teria gerado a confiança que gerou e já teria causado um terrível prejuízo a todos os seus usuários. Como vimos no capítulo inicial de precificação de opções o mercado simplesmente adotou a fórmula de Black-Scholes em ordem zero e a corrige pelo sorriso da volatilidade para seguir adiante.

O fato foi que o mercado de derivativos explodiu após a incorporação da fórmula de Black-Sholes alncançando hoje, mesmo após a crise de 2007-2010 o valor astronômico de 1.200 trilhões de dólares, ou 1,2 quatrilhões de USD. Esse valor é 20 vezes maior do que o PIB total do mundo de 60 trilhões de USD. Aparentemente a fórmula gerou confiança e o mercado explodiu. Ian Stewart afirma no seu livro ***“In Pursuit of the Unknown: 17 Equations That Changed the World”***, que o valor total de bens industriais produzidos em toda a história da humanidade, deflacionados para valores atuais, é de cerca de 100 trilhões de USD, ainda quase 1/10 do total de contratos de derivativos em 2013.

<http://www.goddardconsulting.ca/option-pricing-binomial-alts.html>

**Introdução:**

A demonstração dos resultados no paper de 1973 foi apresentada como a solução de uma equação diferencial estocástica relacionada aos processos de difusão. Entretanto aqui vamos deduzir a fórmula de Black&Scholes de 3 diferentes formas.

A primeira forma é baseada no prêmio justo com a suposição de que os preços das ações seguem uma distribuição log-Normal, ou um Movimento Browniano Geométrico, e que as probabilidades são risco neutras, logo a esperança do retorno da ação é igual à renda fixa. A justificativa para o uso da distribuição log-Normal pode ser feita através do Teorema Central do Limite, que afirma que a adição de muitas variáveis aleatórias independentes tende a uma distribuição Normal. Como os log-retornos são aditivos, então os retornos devem seguir uma distribuição log-Normal. Por outro lado, percebe-se que no mundo com hedge perfeito das probabilidades risco-neutra, se a esperança do retorno da ação não for igual à da renda fixa haveria espaço para arbitragem.

A segunda forma é feita através do limite do modelo CRR para um número de períodos tendendo a infinito. Note que a idéia do limite do número de períodos tender a infinito nesse caso não é aumentar T, a maturidade, finita, definida em contrato, mas sim diminuir o período para intervalos de tempo muito curtos e tender a um processo estocástico contínuo.

A terceira forma, que foi a publicada por Black&Scholes, vem através da solução de uma equação diferencial estocástica que pode ser reduzida à equação da difusão.

**Preliminares:**

No modelo binomial Cox-Ross-Rubinstein [CRR] apresentado no capítulo 4 a idéia foi construir um portfólio replicante e utilizar o axioma de que arbitragem não é permitida para precificar a opção. Vamos reproduzir os resultados importantes dessa seção que permitem a generalização para modelos mais sofisticados como Black & Scholes e outros. Lembrando que so havima dois estados da natureza possíveis, U [Up] e D [down] e um ativo que permitisse um lucro  no estado U e  no estado D podia ser replicado comprando  de ações [stocks] e de bonds. Esse portfólio replicante pode então ser usado como hedge da operação vender vender o ativo em questão. O hedge em que  é chamado de DELTA HEDGING.

A forma de aplicar CRR em n períodos foi desenvolver o conceito de probabilidades risco neutras em que as porbabilidades para os dois estados U e D foram dadas por:

 e 

Vamos analisar qual a esperança de lucro descontado do ativo  com essas probabilidades:



Mas isso foi exatamente o preço cobrado pelo ativo no momento do contrato. Em outros termos, se o derivativo custa  então  nas probabilidades risco-neutras. As probabilidades risco neutra não possibiltam operações de arbitragem e são chamadas matematicamente de Martingales.

#### Martingale

A palavra vêm do francês e era usada para a estratégia de dobrar a aposta até que conseguisse vencer. O significado usual é da correia que vai do bocal ao encontro das patas dianteiras para evitar que o cavalo levante demasiadamente a cabeça. Em probabilidade o Martingale é um processo estocástico em que a sequência  tem a seguinte propriedade:





Ou seja, os valores  não interessam, pois não há memória.

Como qualquer modelo de precificação vai impor a condição de não arbitragem apenas as distribuições de probabilidade na forma de Martingales são permitidas para as probabilidades risco-neutras. Existe um teorema que prova que não há possibilidade de arbitragem com uma distribuição martingale.

### Probabilidades Risco-Neutra independentes da trajetória:

O próximo passo do modelo CRR foi tornar as probabilidades risco-neutras independente da trajetória impondo o modelo multiplicativo  e , em que U e S são constantes no tempo. Nesse caso, independente do valor da ação, as probabilidades risco-neutras são dadas por:

 e 

**Opções européias em n períodos:**

Com esses resultados obtivemos as expressões para os preços das opções:





onde . Vale notar que essas expressões obedecem a paridade PUT-CALL .

Mudando para o log-retorno: , logo  e . Vamos re-escrever as equações como:



Agora checamos se e  se comportam também como probabilidades, ou seja, se , o que é verdade porque:



Então podemos escrever as equações como:





#### Processos estocásticos

Um processo estocástico é um caso não determinístico no qual o estado no período seguinte, momento  não está determinado pelo estado no momento atual, . Nesse caso a distribuição de probabilidade da variável aleatória  depende do tempo. Para um tempo fixo, dado, temos uma distribuição de probabilidade definida. Se deixamos  evoluir temos uma trajetória aleatória , entre muitas possibilidades de trajetórias diferentes, mesmo com o  constante para todas as trajetórias. Agora a variável aleatória  se torna uma função aleatória do tempo. No contexto do nosso trabalho vamos dar exemplo de dois processos, um aditivo e outro multiplicativo.

#### Processos estocásticos aditivos

Sabemos que para  a binomial converge para a normal: . Como n representa o número de períodos vamos expressá-lo simplesmente como o tempo . Suponha a situação aditiva em que  com probabilidade , ou  com probabilidade , sendo . Seja  o número de passos Up e  o número de passos Down. Depois de  períodos o preço será . Mudando a variável para  temos que , onde . Além disso, , logo, o preço da ação após  períodos segue o Movimento Browniano, ou processo estocástico de Wiener, dado pela normal . Esse processo é conhecido como Movimento Browniano ou processo estocástico de Wiener.

#### Processos estocásticos multiplicativos

Suponha agora o processo multiplicativo  com probabilidade  ou  com probabilidade . Depois de  passos o preço será . Tirando o logaritmo de ambos os lados  e . Nesse caso  e o preço da ação segue um movimento Browniano Geométrico dado pela log-normal: .

Note as diferenças entre os dois processos, o Browniano e o Browniano Geométrico:

 e 

O capítulo xx apresentou as propriedades das distribuições Normal e log-Normal. No primeiro caso  e . No segundo caso  para a qual vale a regra .

## Dedução da fórmula de Black & Scholes pelo prêmio justo12F[[1]](#footnote-1).

A idéia para a dedução da fórmula de Black & Scholes através do conceito de prêmio justo vem dos seguintes postulados:

1. O preço das ações segue uma distribuição log-normal com parâmetros  e , na forma , para a qual .
2. A esperança do log-retorno tem que ser igual à renda fixa r, ou seja,  para evitar a possibilidade de arbitragem. Nesse caso .
3. O prêmio deve ser igual à esperança de lucro intrínseco do titular usando a log-normal .

Comentários: o postulado número 2 ficou vago e não foi necessário na primeira forma de deduzir B&S. Na forma mais rigorosa, utilizando equação diferencial estocástica, tanto o processo de hedging, via delta-hedge, quanto a operação de arbitragem que se deseja evitar, são mostrados explicitamente. Felizmente existe um teorema relativo à arbitragem que garante que a condição 2 se verifica. O resultado final, portanto, é correto.

Dadas as suposições acima, podemos escrever:



Que pode ser re-escrita como:



Vamos fazer a mudança de variável para re-escrever a integral como:



Vamos começar com a segunda integral . Mudando a variável para  chegamos a , onde , logo .

Nesse ponto já temos o resultado: , faltando apenas resolver a primeira integral . A idéia é completar quadrado no expoente chegando, após álgebra direta, ao resultado:



Nesse ponto troca-se a variável para , a qual nos leva ao limite inferior , e ao resultado intermediário:

Cancelando , finalmente, recuperamos Black & Scholes:

 e , com:

 e  .

## Dedução da fórmula de Black & Scholes pela convergência do modelo CRR[[2]](#footnote-2):

Convergência da Binomial para a Normal pode ser estabelecida como:



Seja  a função distribuição de probabilidade cumulativa da Normal padrão . Podemos usar a simetria da Normal, , para expressar a somatória como . Já a somatória complementar será dada diretamente por .

Trocando o retorno pelo log-Retorno , ou , no modelo CRR chegamos a:





No limite de  nos leva a:

, ou .

Essa é quase a fórmula de Black & Scholes desde que possamos expressar tudo em termos do log-retorno r e sua volatilidade , em lugar das probabilidades . Note que o preço da ação não segue as probabilidades risco-neutras do modelo binomial, mas um conjunto  qualquer. A idéia, portanto, é escrever tudo em termos da esperança e variância dos preços das ações evitando utilizar o conjunto de probabilidade  específico. Se o preço só pode subir ou descer pelos fatores  e  ao fim de n períodos teremos que  e , portanto, . Nesse caso  de onde tiramos que . Nada aqui depende das probabilidades.

Por outro lado  ou seja, . Dessa forma obtemos , e podemos escrever .

Para o segundo termo da CALL temos que . Isso significa que , e que . Se x segue uma log-normal então , de onde tiramos que . Daqui vemos que. Usando esse resultado obtemos:



O qual nos permite expressar  como:

.

Para o primeiro termo as probabilidades agora são  e . Nesse caso . Isolando para  temos que, , que pode ser transformado em . Desse resultado extraímos que:



Mas  logo  e . Entretanto  e , porque se x e y são independentes, então  e os passos são independentes entre si. Agora  e . De onde tiramos que .

Agora se  segue uma log-normal, então . Todavia,  porque a esperança troca de sinal, mas a variância não, ou seja: , mas . Dessa forma  e . Daqui, portanto, extraímos que . Assim obtemos .

Dessa forma chegamos aos resultados de Black & Scholes:

**** e , com:

 e  .

## Dedução da equação diferencial estocástica de Black & Scholes:

### Processos Estocásticos

#### 1. Movimento Browniano Padrão

Movimento Browniano Padrão é um processo estocástico que satisfaz as seguintes propriedades:

1. 
2. é uma distribuição normal com esperança nula e variância 
3. , ou seja, os incrementos são independentes entre si

Nesse caso a distribuição é dada por: .

#### Movimento Browniano com Drift

O movimento Browniano com drift tem as propriedades 1 e 3 idênticas ao Movimento Browniano Padrão, mudando apenas a 2:

1. é uma distribuição normal com esperança  e variância 

Nesse caso, se  e  retornamos ao Movimento Browniano Padrão

#### Martingale

A palavra vêm do francês e era usada para a estratégia de dobrar a aposta até que conseguisse vencer. O significado usual é da correia que vai do bocal ao encontro das patas dianteiras para evitar que o cavalo levante demasiadamente a cabeça. Em probabilidade o Martingale é um processo estocástico em que a sequência  tem a seguinte propriedade:





Ou seja, os valores  não interessam, pois não há memória.

Note que  satisfaz as condições do Movimento Browniano com Drift.





#### Composição de Movimentos Brownianos

Se em  o sistema estava em , a probabilidade de encontrar  entre  e  no tempo  será dada por:



Agora, sabendo que em  ele estava em , a probabilidade de encontrar  entre  e  no tempo  será dada por:

.

Analisemos agora a probabilidade composta de chegar a  no momento  sabendo somente que o sistema estava em  no momento . Nesse caso, temos que:





 é a convolução entre  e . Logo,

, , e suas respectivas funções características serão:

 e .

A função característica de  será dada agora por :



Agora podemos encontrar a função , que será dada por:



Isso significa que a distribuição de dois movimentos Brownianos subtraídos é um Movimento Browniano com o  entre os dois momentos:



Vamos chamar o diferencial estocástico . Note que a função não é diferenciável pois:

, e  se . Portanto, o diferencial existe mas a derivada não. Isso vêm do fato de que , 

Agora:







, pois 

, pois é de ordem 3.

Assim, percebemos que  segue uma distribuição normal, com esperança nula mas não pode ser desprezado frente ao drift porque  é da mesma ordem que . A regra de multiplicação dos diferenciais estocásticos até primeira ordem é:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Tabela 6.** Regra de multiplicação dos diferenciais estocásticos até primeira ordem

Com a Tabela 6 podemos expandir qualquer função de uma variável  que segue um Movimento Browniano: 

#### Lema de Itô

Usar a tabela de multiplicação para fazer a expansão em série de Taylor de qualquer função de , mas sabendo que:



Note que, conforme demonstrado na Tabela 6, ,  e , logo .



Então, para 







Assim, temos um termo determinístico, dado por , e um termo estocástico, .

#### Movimento Browniano Geométrico

No caso da Log-normal,  e o  satisfaz as condições de um Movimento Browniano Geométrico.









Fazendo  o Movimento Browniano Geométrico segue:



Enquanto o Movimento Browniano segue



Desde Bachelier que se encontra que o preço das ações segue um Movimento Browniano Geométrico em lugar do Browniano Simples. Ou seja, é o log-retorno quem segue o movimento Browniano, , e não o . Então podemos supor que:



## Equação da Difusão

Fluxo, em física, significa quantidade de algo, vamos chamar de , por unidade de área por unidade de tempo . Vamos analisar apenas o caso unidimensional para evitar o cálculo vetorial. Com essa definição vamos fazer o balanço de M em um volume:













onde a concentração de M é dada por . Dessa forma chegamos na Equação da Continuidade, dada por:  .

## Lei de Fourier: , ou seja, o fluxo de vai da região de maior concentração para a de menor concentração, por isso chama-se de difusão. D é chamado de coeficiente de difusão. Dimensão de D: logo , tipicamente, D é dado em . Usando a Lei de Fourier na equação da continuidade: chegamos na equação da Difusão:

## 

## Solução da equação da DIFUSÃO: Sem condição inicial vamos verificar que é solução da equação da difusão. Para tanto notamos que logo:

## 

## Por outro lado: e a derivada segunda é dada por:

****

Então .

Comparando com o movimento Browniano: **** vemos que a mudança de variáveis , ou  mostra que o movimento Browniano é solução da equação de difusão. No caso do bêbado:  , logo . Com  temos que , que pode ser escrita como: , com . No caso da difusão é o livre caminho médio das moléculas antes de um choque com outras moléculas.

Agora, a solução que encontramos **** é uma Normal, logo . Mas no limite  a largura da normal vai a zero, mantendo a área unitária. Logo:

****

Então essa solução só vale se, inicialmente, todo estava concentrado em um ponto, ou seja, .

**Solução da Equação de Difusão com condição inicial.**

Suponha agora que queremos a solução da equação de difusão que inicialmente, em , valia  qualquer.

Note que satisfaz a equação de difusão.

, pois ,  e  não muda. .

Só que agora podemos tomar o de ambos os lados:





Então:



É a solução da equação de difusão com a condição inicial dada.

# O Modelo Black & Scholes

Vamos usar a seguinte notação nas grandezas que aparecem no modelo de Black&Scholes:  é dinheiro,  o preço da ação e  o prêmio da opção de compra. Nossa convenção de sinais é a do investidor que entra com dinheiro positivo em para receber dinheiro no momento seguinte. Assim quantidades positivas em  significa que o investidor pagou e negativas que ele recebeu. A análise é feita sobre o ponto de vista do lançador da opção. As hipóteses do modelo de Black & Scholes são as seguintes:

1. Mercado perfeito.
2. A taxa de renda fixa vale  e não há limite nem racionamento de crédito portanto, .
3. O preço das ações segue uma Distribuição Browniana Geométrica: , onde  é o drift, ou o rendimento determinístico,  a volatilidade e  um processo de Wiener, ou movimento Browniano padrão.
4. O retorno de portfólios de arbitragem sem riscos é nulo.

**Desenvolvimento da equação diferencial estocástica de Black & Scholes:**

Se é o prêmio da opção então a expansão em série de Taylor com o Lema de Itô é dada por:

,

Agora, vamos criar um portfólio de arbitragem com um investimento  aplicando  em renda fixa, comprando  ações por  e vendendo uma opção por , ou seja, . O retorno desse portfólio é dado pela soma dos retornos: . Substituindo as expressões acima temos que:



Que pode ser escrito como:



**Eliminando o RISCO.** Observando a expressão acima percebemos que o retorno contém um termo determinístico e um termo estocástico. Para eliminar o risco precisamo anular o termo estocástico, o que é feito obrigando:  ou seja . Voltando ao modelo binomial percebemos que a replicação do portfólio foi feita comprando  que é versão discreta do hedge  que acabamos de obter. Esse é o chamado delta-hedging. Note que se trata de um hedge dinâmico pois a quantidade de ações vai mudando ao longo do tempo de acordo com a mudança dos pagamentos possíveis para a opção. No modelo de Black&Scholes o delta hedging elimina completamente o risco.

**Desaparecimento do DRIFT.** Note entretanto que ao escolher  o termo contendo o drift desaparece e ficamos com:



Vale a pena perceber aqui que a eliminação do risco elimininou o retorno determinístico e tudo vai depender apenas do retorno de renda fixa do mercado. É análogo ao fato de que usamos as probabilidades de risco neutra no modelo binomial e não as probabilidades verdadeiras. Na probabilidade de risco neutra o preço da ação se torna um Martingale e o retorno esperado com essa probabilidades é o retorno de mercado da renda fixa. Isso justifica o segundo procedimento que utilizamos para calcular a fórmula de Black & Scholes obrigando a ação a apresentar um  para a esperança de retorno ser igual a da renda fixa. Note entretanto que a ação poderia apresentar qualquer retorno determinístico  por que ele desapareceu na eliminação do risco.

Só falta agora impor a condição de que portfólios de arbitragem apresentam retornos nulos, ou haveria oportunidade de arbitragem. Para ser um portfólio de arbitragem é necessário que , ou , logo

 e chegamos na equação diferencial estocástica de Black & Scholes:



Condições iniciais:

Para a call as soluções iniciais são as seguintes: se o valor da ação é nulo então uma opção sobre ela nada custa pois nada se deve pagar no final. Matematicamente isso é escrito como . Se a opção é instântanea, i.e., , só existem duas alternativas:  e o lançador exigiria  para cobrir seu prejuízo ou  e a opção nada custa. Matematicamente isso é escrito como . As duas condições iniciais portanto são:  e .

**Solução da equação diferencial de Black & Scholes.**

Existem duas formas de chegar à solução de Black&Scholes. Uma é usar a fórmula já conhecida e verificar que ela satisfaz a equação diferencial e às condições iniciais. Outra, a utilizada originalmente no trabalho de 1973 é usar mudanças de variáveis para converter a equação diferencial de B&S na equação de difusão. Vamos usar o método original nesse trabalho.

Vamos começar com a verificação de que a fórmula de Black&Scholes:



onde com  e  com  definido em  e , logo  é o tempo que falta para chegar à maturidade, satisfaz à equação diferencial estocástica:



e as condições iniciais:

 e 

Melhor separar as dependências temporais de  e  na forma:





escrever

Para isso vamos começar mostrando que :















Por outro lado:



Logo  CQD.

Agora , logo 

























Agora ,  e então:

Daí:



Agora é colocar todos os termos na equação:



Logo. Só falta mostrar que a solução satisfaz as condições iniciais:

 e da mesma forma .

 logo:



O outro limite é para  nesse caso



Mas



Se  então  e se Se  então  então:



Assim a fórmula de Black&Scholes satisfaz à equação diferencial estocástica e às condições iniciais, logo é a solução.

**Conversão da Equação de B&S na equação de Difusão:**

A equação de B&S  envolve derivada segunda em relação à e primeira em relação à  mas não é a equação de difusão porque envolve primeira derivada em relação à , o sinal da derivada em  está trocado, está multiplicada por  e e tem um termo  a mais. Vamos aplicar um conjunto de transformações até levar essa equação para a equação de difusão, explicando o papel de cada uma dessas transformações.

**Transformação 1**: Para se livrar de e : fazer , mantendo o  para que  seja adimensional,  não muda mas  e . Dessa forma a equação se transforma em que resulta em:



**Transformação 2:** Para se livrar do . Se  não dependesse de  teríamos  e . Logo,  ou . Fazendo  então







**Transformação 3:** Para se livrar de constantes e trocar o sinal de 

 e 







Substituindo





**Transformação 4:** Para se livrar de 

, 

, 







Ou seja,  é solução de 

Agora: 

, . . Para , . O termo . A condição inicial é que: , , como 



Em termos da variável  temos que:



Mas  para , então:





Vamos mudar a varia para , 

. Se , 













, então:







,, 









 e 

1. Essa é a forma utilizada para o cálculo dos prêmios das opções no capítulo 22 de André Marins, ***“Mercado de Derivativos e Análise de Risco”***, AMS Editora 2004. [↑](#footnote-ref-1)
2. A convergência do modelo de CRR para Black&Scholes na forma a seguir pode ser encontrada nas notas de aula do Prof. Don M. Chance, ***Teaching Note 00-08: Convergence of the Binomial to the Black-Scholes Model (July 8, 2008)***, disponibilizadas em pdf no site http://www.bus.lsu.edu/academics/finance/faculty/dchance/Instructional/Instr.htm [↑](#footnote-ref-2)